1 Fundamental Knowledge 基礎知識

速讀筆記

1A Principle of Mathematical Induction 數學歸納法原理

Let $P(n)$ be a proposition about a positive integer n. $P(n)$ is true for all positive integers n if both the following conditions are satisfied.

設 $P(n)$ 為一個關於正整數 n 的命題。當下列兩個條件都能滿足時，命題 $P(n)$ 對所有正整數 n 均成立。

(I) $P(1)$ is true.
$P(1)$ 成立。

(II) If $P(k)$ is true for some positive integer k, then $P(k+1)$ is true.
對任意正整數 k，若 $P(k)$ 成立，則 $P(k+1)$ 成立。

應試備忘

- 留意使用數學歸納法時的正確字眼，例如部分考生把「Assume $P(k)$ is true when $n=k$, where k is a positive integer (假設當 $n=k$ 時 $P(k)$ 成立，其中 k 為一正整數。)」胡亂簡化為「Assume $n=k$ (假設 $n=k$)」，變了一句沒意思的句子。
- 此外，結論應寫「$P(n)$ is true for all positive integers n (對於所有正整數 n，$P(n)$ 成立)」，但若考生把其誤寫為「$P(n)$ is true for all real n (對於所有實數 n，$P(n)$ 成立)」，則顯示其概念錯誤，因為 n 不可以是任意實數。

1B Binomial Theorem 二項式定理

If n is a positive integer, then

若 n 為一正整數，則

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \dots + C_r^n x^{n-r}y^r + \dots + C_n^n y^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r}y^r$$

提示

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = \sum_{r=1}^{n} T_r$$

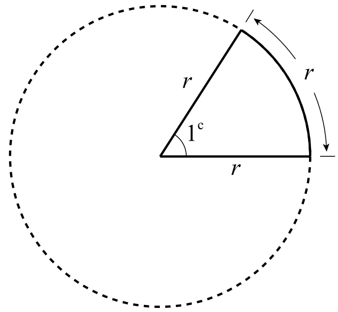
應試備忘

- 由於在很多題目中 n 是未知數，考生必須知道 $C_1^n = n$ 及 $C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 才可列出方程求 n。

1C Radian Measure 弧度法

- If the length of an arc of a circle is equal to the radius of the circle, then the measure of the angle at centre subtended by that arc is defined to be 1 radian (1 rad. or 1^c).

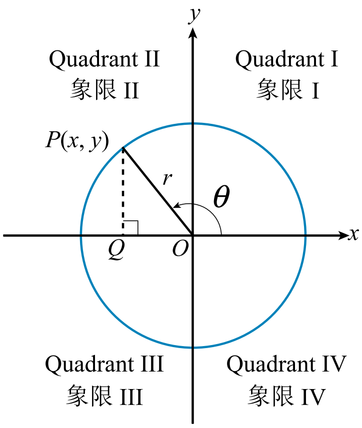
  若一弧長相等於圓的半徑，則該弧所截出的圓心角的大小定義為 1 弧度（1^c）。



- π radians $= 180°$

  π 弧度 $= 180°$

1D Trigonometric Functions 三角函數



提示

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

r 必為正數。

(a) $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ **(b)** $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ **(c)** $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

(d) $\csc\theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ **(e)** $\sec\theta = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos\theta}$ **(f)** $\cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

1E Trigonometric Identities 三角恆等式

(a) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(b) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(c) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(d) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(e) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

1F Compound Angle Formulas 複角公式

(a) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(b) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

(c) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(d) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

(e) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(f) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

1G Double Angle Formulas 二倍角公式

(a) $\sin 2A=2\sin A\cos A$

(b) $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$
$=1-2\sin^2 A$
$=2\cos^2 A-1$

(c) $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(d) $\sin^2 A=\dfrac{1-\cos 2A}{2}$

(e) $\cos^2 A=\dfrac{1+\cos 2A}{2}$

由 (b) 所得

提示
在 1F 的 (a)、(c) 及 (e) 中，代入 $B=A$，便可分別得出 1G 的 (a)、(b) 及 (c)。

1H Product-to-sum and Sum-to-product Formulas 積化和差公式、和差化積公式

(a) Product-to-sum Formulas 積化和差公式

(i) $\sin A\cos B=\dfrac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$

(ii) $\cos A\sin B=\dfrac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$

(iii) $\cos A\cos B=\dfrac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$

(iv) $\sin A\sin B=-\dfrac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$

(b) Sum-to-product Formulas 和差化積公式

(i) $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(ii) $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

(iii) $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

(iv) $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

提示
HKDSE 考卷會提供 1F 及 1H 的公式。

應試技巧 1.1

Prove propositions involving summation of finite sequences
證明涉及有限數列求和的命題

注意

- 留意使用數學歸納法時的正確字眼。

應試例題1.1

參考：2020Q05

(a) Using mathematical induction, prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

for all positive integers n.

利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}。$$

(b) Using **(a)**, evaluate $\displaystyle\sum_{k=4}^{33} \frac{97083}{(4k^2-1)(2k+3)}$.

利用 **(a)**，計算 $\displaystyle\sum_{k=4}^{33} \frac{97083}{(4k^2-1)(2k+3)}$。

(7 marks)

題解

(a) Note that $\dfrac{1}{(1)(3)(5)} = \dfrac{1(1+2)}{3(3)(5)}$.

留意 $\dfrac{1}{(1)(3)(5)} = \dfrac{1(1+2)}{3(3)(5)}$。

部分考生慣性引入符號 $P(n)$ 代表要證明的命題，其實無此需要。留意評卷參考或本題解的寫法。

緊記指出 $n = 1$ 時成立。

Therefore, the statement is true for $n = 1$. 1

因此，對於 $n = 1$，該命題成立。

Assume that $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{m(m+2)}{3(2m+1)(2m+3)}$,

where m is a positive integer. 1M

由於符號 k 已用於求和記法，故需引入另一符號 m。留意「m is a positive integer（正整數）」。

假設 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{m(m+2)}{3(2m+1)(2m+3)}$，

其中 m 為一正整數。

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$$

$$= \frac{m(m+2)}{3(2m+1)(2m+3)} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$$ (by induction assumption 藉歸納法假設)

1M for using induction assumption

$$= \frac{m(m+2)(2m+5)+3}{3(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$$

$$= \frac{2m^3+9m^2+10m+3}{3(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$$

$$= \frac{(2m+1)(m+1)(m+3)}{3(2m+1)(2m+3)(2m+5)}$$

考生可以從命題右方猜到如何因式分解分子。

$$= \frac{(m+1)(m+3)}{3(2m+3)(2m+5)}$$

緊記指出 $n = m + 1$ 時成立。

So, the statement is true for $n = m + 1$ if it is true for $n = m$.

因此，若對 $n = m$ ，命題成立，則對 $n = m + 1$ ，命題成立。

By mathematical induction, the statement is true for all positive integers n. 1

藉數學歸納法，對所有正整數 n ，命題成立。

(b) 分析

留意所求的和是從 $k = 4$ 開始，故在使用 **(a)** 部的結果時，須扣回首三項的值。
即：第 4 至 33 頁之和 = 首 33 項之和 − 首 3 項之和

$$\sum_{k=4}^{33}\frac{97083}{(4k^2-1)(2k+3)}$$

$$= 97083\sum_{k=4}^{33}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

$$= 97083\left(\sum_{k=1}^{33}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}\right)$$ 1M

$$= 97083\left(\frac{(33)(33+2)}{3[2(33)+1][2(33)+3]} - \frac{(3)(3+2)}{3[2(3)+1][2(3)+3]}\right)$$ (by **(a)**) 1M for using (a)

$$= 97083\left(\frac{385}{4623} - \frac{5}{63}\right)$$

$$= \underline{\underline{380}}$$ 1A

應試訓練 1

1. **(a)** Using mathematical induction, prove that $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3 - k} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ for all positive integers n.

   (b) Using **(a)**, evaluate $\sum_{k=6}^{47} \frac{47}{k^3 - k}$.

(7 marks)

   (a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ，$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3 - k} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ 。

   (b) 利用 **(a)** ，計算 $\sum_{k=6}^{47} \frac{47}{k^3 - k}$ 。

（7 分）

參考： 2020Q05

2. **(a)** Using mathematical induction, prove that $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$ for all positive integers n.

(b) Using **(a)**, evaluate $\sum_{k=3}^{2017}(-1)^k(k+1)$.

(6 marks)

(a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$。

(b) 利用 **(a)**，計算 $\sum_{k=3}^{2017}(-1)^k(k+1)$。

（6 分）

參考： 2016Q05

應試技巧 1.2

Apply the binomial theorem to find the expansion of $(a+b)^n$
應用二項式定理求 $(a+b)^n$ 的展開式

注意

- 由於在很多題目中 n 是未知數，考生必須知道 $C_1^n = n$ 及 $C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 才可列出方程求 n。

應試例題 1.2

參考：2021Q03

The coefficient of x^2 in the expansion of $(1-4x)^n$ is 160, where n is a positive integer. Find

$(1-4x)^n$ 的展開式中 x^2 的係數為 160，其中 n 為一正整數。求

(a) n,

(b) the coefficient of x in the expansion of $(1-4x)^n\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$.

$(1-4x)^n\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$ 的展開式中 x 的係數。

(6 marks)

題解

(a) $(1-4x)^n = 1 - n(4x) + \dfrac{n(n-1)}{2}(4x)^2 - \ldots$ 1M

$\dfrac{n(n-1)}{2}(4)^2 = 160$ 1M

$n^2 - n - 20 = 0$

$n = 5$ or $n = -4$ (rejected)

Thus, we have $n = \underline{\underline{5}}$. 1A

因此，得出 $n = \underline{\underline{5}}$。

提示
$C_1^n = n$
$C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

(b) $\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^{10} = 1 + 10\left(\dfrac{2}{x^2}\right) + 45\left(\dfrac{2}{x^2}\right)^2 + \cdots$ 1M

$= 1 + \dfrac{20}{x^2} + \dfrac{180}{x^4} + \cdots$

The coefficient of x

x 的係數

$= (1)(5)(-4) + 20(10)(-4)^3 + 180(-4)^5$ 1M (withhold 1M if this step is skipped)

$= \underline{\underline{-197140}}$ 1A

提示
$(1-4x)^5$
$= 1 + 5(-4)x + 10(-4)^2x^2 + 10(-4)^3x^3 + 5(-4)^4x^4 + (-4)^5x^5$

應試訓練 1

3. Consider the expansion of $(1 + ax)^n$, where a is a constant and n is a positive integer. The coefficient of x in the expansion is -16. The sum of the coefficients of x^2 and x^3 is -336. Find the values of a and n.

(4 marks)

考慮 $(1 + ax)^n$ 的展開式，其中 a 為一常數而 n 為一正整數。展開式中 x 的係數為 -16 。x^2 與 x^3 的係數之和為 -336 。求 a 及 n 的值。

（4 分）

參考： 2013Q02

4. In the expansion of $(1+2x)^n(1-x)^2$, where n is a positive integer, the coefficient of x^2 is 9.

(a) Find the value of n.

(b) Find the coefficient of x.

(5 marks)

在 $(1+2x)^n(1-x)^2$ 的展開式中，x^2 的係數是 9，其中 n 為一正整數。

(a) 求 n 的值。

(b) 求 x 的係數。

(5 分)

參考： 2014Q01

應試技巧 1.3

Apply trigonometric formulas to solve equations
應用三角公式解方程

注意

- 解三角方程時須留意角的取值範圍。

應試例題 1.3

參考：2023Q04

(a) Show that $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

證明 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$。

(b) Using **(a)**, solve the equation $\csc^3 x + 6\csc^2 x - 8 = 0$, where $0 < x < \pi$.

利用 **(a)**，解方程 $\csc^3 x + 6\csc^2 x - 8 = 0$，其中 $0 < x < \pi$。

(5 marks)

題解

(a)

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(x + 2x)\\ &= \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x && \text{1M}\\ &= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + \cos x(2\sin x\cos x)\\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x\\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x)\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x && \text{1}\end{aligned}$$

提示

Compound angle formula 複角公式
$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

(b)

分析

若把所給的方程全式乘以 $\sin^3 x$，則會轉換成一條 $\sin x$ 的方程，從而有機會應用 **(a)** 的結果。

$$\csc^3 x + 6\csc^2 x - 8 = 0$$

$$1 + 6\sin x - 8\sin^3 x = 0$$

$$3\sin x - 4\sin^3 x = \frac{-1}{2}$$

$$\sin 3x = \frac{-1}{2} \qquad \text{1M}$$

$$\therefore\ 3x = \pi + \frac{\pi}{6} \text{ or } 3x = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

因為 $0 < x < \pi$，
所以 $0 < 3x < 3\pi$。

$$x = \underline{\underline{\frac{7\pi}{18}}} \text{ or } x = \underline{\underline{\frac{11\pi}{18}}} \qquad \text{1A + 1A}$$

5. Let $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$.

(a) Prove that $\dfrac{\tan\theta}{1+\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1+\tan\theta} = \sec\theta\csc\theta - 1$.

(b) Solve the equation $\dfrac{\tan\theta}{1+\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1+\tan\theta} = 3$.

(5 marks)

設 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ 。

(a) 證明 $\dfrac{\tan\theta}{1+\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1+\tan\theta} = \sec\theta\csc\theta - 1$ 。

(b) 解方程 $\dfrac{\tan\theta}{1+\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1+\tan\theta} = 3$ 。

（5 分）

參考： 2022Q02

6. **(a)** Solve the equation $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ for $0° < \theta < 45°$.

(b) Prove that $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ can be expressed as $16 \cos^4\theta - 20 \cos^2\theta + 5 = 0$ for $0° < \theta < 45°$.

(c) Using the results of **(a)** and **(b)**, find the value of $\sin 54°$.

(7 marks)

(a) 解方程 $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ ，其中 $0° < \theta < 45°$ 。

(b) 證明 $\cos 3\theta = \sin 2\theta$ 可以表示為 $16 \cos^4\theta - 20 \cos^2\theta + 5 = 0$ ，其中 $0° < \theta < 45°$ 。

(c) 利用 **(a)** 及 **(b)** 的結果，求 $\sin 54°$ 的值。

（7 分）

參考： 2016Q06

甲部 應試特訓 1

應試技巧 1.1

1. Prove, by mathematical induction, that

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

for all positive integers n.

(5 marks)

利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}\text{ 。}$$

（5 分）

參考：2013Q03

2. Prove, by mathematical induction, that $\sum_{k=1}^{n}k\times k!=(n+1)!-1$ for all positive integers n.

(5 marks)

利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，$\sum_{k=1}^{n}k\times k!=(n+1)!-1$ 。

（5 分）

3. **(a)** Prove, by mathematical induction, that

$$1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$$

for all positive integers n.

(b) Using the result of **(a)**, simplify $\sum_{r=1}^{n}(r+1)\times 2^r$.

(7 marks)

(a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n，

$$1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n=(n-1)\times 2^{n+1}+2\text{ 。}$$

(b) 利用 **(a)** 的結果，化簡 $\sum_{r=1}^{n}(r+1)\times 2^r$ 。

（7 分）

應試技巧 1.2

4. It is given that $(1 + kx)^n = 1 - 24x + 252x^2 +$ terms involving higher powers of x, where n is a positive integer and k is a constant.

(a) Find the values of k and n.

(b) Find the coefficient of x^3.

(6 marks)

已知 $(1 + kx)^n = 1 - 24x + 252x^2 +$ 包含 x 較高冪的項，其中 n 為正整數，k 為常數。

(a) 求 k 和 n 的值。

(b) 求 x^3 的係數。

（6 分）

參考： 2012Q02

5. Expand $(4 - x)^3$. Hence, find the constant term in the expansion of $(4 - x)^3\left(1 + \frac{6}{x}\right)^4$.

(5 marks)

展開 $(4 - x)^3$ 。由此，求 $(4 - x)^3\left(1 + \frac{6}{x}\right)^4$ 的展開式中的常數項。

（5 分）

參考： 2018Q02

6. Find the coefficient of x^2 in the expansion of $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^8$.

(3 marks)

求 $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^8$ 的展開式中 x^2 的係數。

（3 分）

7. Let a be a constant. If the coefficient of x in the expansion of $(5+x)^6\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^2$ is -90000, find all possible values a and coefficients of x^3 in the expansion.

(6 marks)

設 a 為一常數。若 $(5+x)^6\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^2$ 的展開式中 x 的係數為 -90000，求 a 及該展開式中 x^3 的係數的所有可能值。

（6 分）

參考：2023Q01

應試技巧 1.3

8. (a) Prove that $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.

(b) Let $f(x) = \sec^4 x - 2\tan^4 x$. Express $f(x)$ in the form $\dfrac{A+B\cos 2x+C\cos 4x}{D+E\cos 2x+F\cos 4x}$, where A, B, C, D, E and F are constants.

(5 marks)

(a) 證明 $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ 。

(b) 設 $f(x) = \sec^4 x - 2\tan^4 x$ 。將 $f(x)$ 表為 $\dfrac{A+B\cos 2x+C\cos 4x}{D+E\cos 2x+F\cos 4x}$ 的形式，其中 A 、B 、C 、D 、E 及 F 均為常數。

（5 分）

參考：2015Q07

9. It is given that $A - B = \dfrac{\pi}{4}$.

(a) Show that $\tan A = \dfrac{1+\tan B}{1-\tan B}$.

(b) Using the result of **(a)**, find the value of $\tan\dfrac{3\pi}{8}$.

(5 marks)

已知 $A - B = \dfrac{\pi}{4}$ 。

(a) 證明 $\tan A = \dfrac{1+\tan B}{1-\tan B}$ 。

(b) 利用 **(a)** 的結果，求 $\tan\dfrac{3\pi}{8}$ 的值。

（5 分）

10. **(a)** Show that $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

(b) Using **(a)** and the fact that $\sin 108° = \sin 72°$, show that $\cos 36°$ is a root of the equation $4x^2 - 2x - 1 = 0$. Hence find the exact value of $\cos 36°$.

(7 marks)

(a) 證明 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ 。

(b) 利用 **(a)** 和 $\sin 108° = \sin 72°$ ，證明 $\cos 36°$ 是方程 $4x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根。由此，求 $\cos 36°$ 的真確值。

（7 分）

參考： 2016Q06

綜合應試技巧

11. **(a)** Using mathematical induction, prove that

$$\sin x \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \sin nx \cos(n+1)x$$

for all positive integers n.

(b) Using **(a)**, evaluate $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025} \cos\frac{k\pi}{9}$.

(8 marks)

(a) 利用數學歸納法，證明對所有正整數 n ，

$$\sin x \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \sin nx \cos(n+1)x \text{ 。}$$

(b) 利用 **(a)** ，計算 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025} \cos\frac{k\pi}{9}$ 。

（8 分）

參考： 2023Q08

1
2
3
B
4
5
B
6
7
B
8
B
A

Section B Train-up Zone (III)
乙部訓練場 (III)

應試例題 1

參考：2012Q11

(a) Solve the equation $\begin{vmatrix} x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x+2 \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots(*)$. 應試技巧 6.1

解方程 $\begin{vmatrix} x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x+2 \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots(*)$ 。

(2 marks)

(b) Let x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ be the roots of $(*)$. Define $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ such that $\begin{pmatrix} x_1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x_1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x_2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, where a, b and c are positive constants and d is a negative constant.

設 x_1 、 x_2 $(x_1 < x_2)$ 為 $(*)$ 的根。定義 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 使得 $\begin{pmatrix} x_1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x_1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} x_2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x_2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ ，其中 a 、 b 及 c 均為正常數及 d 為一負常數。

(i) Evaluate $P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}P$. 應試技巧 6.2

計算 $P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}P$ 。

(ii) Using **(b)(i)**, evaluate $\left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{24}$. 應試技巧 6.3

利用 **(b)(i)** ，計算 $\left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{24}$ 。

(11 marks)

題解

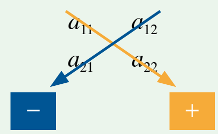
(a) $\begin{vmatrix} x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x+2 \end{vmatrix} = 0$

$x(x+2) - 3 = 0$ **1M**

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = \underline{\underline{-3 \text{ or } 1}}$ **1A**

提示



(b) **(i)** $x_1 = -3, x_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} -3a + \sqrt{3}b = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$ **1M**

由以上矩陣的第 2 行，可得 $\sqrt{3}a - b = 0$，此式等價於 $-3a + \sqrt{3}b = 0$。
留意，題目已給 $a^2 + b^2 = 1$。

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ **1A**

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} c + \sqrt{3}d = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ d = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ **1A**

$$\therefore \ P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|P| = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1$$

$$P^{-1} = \frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ 1M

$$\therefore \quad P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}P$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ 1M

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$ 1A

(ii) $$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}P\right)^{24} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{24}$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{24}P = \begin{pmatrix} 3^{24} & 0 \\ 0 & (-1)^{24} \end{pmatrix}$$ 1A

應試備忘

- $(P^{-1}QP)^n = \underbrace{(P^{-1}QP)(P^{-1}QP)(P^{-1}QP)\cdots(P^{-1}QP)}_{n\text{ 項}} = P^{-1}Q^nP$
- 設 n 為正整數。一般來說，$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^n \neq \begin{pmatrix} p^n & q^n \\ r^n & s^n \end{pmatrix}$。

  不過，對於對角矩陣 $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & s^n \end{pmatrix}$。

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{24} = P\begin{pmatrix} 3^{24} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$ 1M

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{24} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^{24}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3^{24}\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^{24}+3}{4} & \frac{(3^{24}-1)\sqrt{3}}{4} \\ \frac{(3^{24}-1)\sqrt{3}}{4} & \frac{3^{25}+1}{4} \end{pmatrix}$$ 1A

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{24}\right| = \left|P\begin{pmatrix} 3^{24} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\right|$$

$$= (-1)(3^{24})(-1)$$

$$= 3^{24}$$

提示

$|AB| = |A||B|$

$$\therefore \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{24}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{24}}\begin{pmatrix} \frac{3^{25}+1}{4} & -\frac{(3^{24}-1)\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{(3^{24}-1)\sqrt{3}}{4} & \frac{3^{24}+3}{4} \end{pmatrix}^{T}$$ 1M

$$\text{i.e.} \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{-1}\right)^{24} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{3^{25}+1}{4(3^{24})} & -\frac{(3^{24}-1)\sqrt{3}}{4(3^{24})} \\ -\frac{(3^{24}-1)\sqrt{3}}{4(3^{24})} & \frac{3^{24}+3}{4(3^{24})} \end{pmatrix}}}$$ 1A

提示

$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

➡ 乙部應試特訓 3：Q1

應試例題 2

參考：2021Q11

Define $A = \begin{pmatrix} 2-\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & 2-\cos\theta \end{pmatrix}$ and $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -1 \\ \sin\theta & 1 \end{pmatrix}$, where $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

定義 $A = \begin{pmatrix} 2-\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & 2-\cos\theta \end{pmatrix}$ 及 $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -1 \\ \sin\theta & 1 \end{pmatrix}$，其中 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$。

(a) Prove that $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-\cos\theta-\sin\theta \end{pmatrix}$. 應試技巧 6.2

證明 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-\cos\theta-\sin\theta \end{pmatrix}$。

(3 marks)

(b) Let $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, where $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. It is given that $A^n = PQP^{-1}$ for any positive integer n. Express α and β in terms of n and θ. 應試技巧 6.3

設 $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$。已知對任意正整數 n，$A^n = PQP^{-1}$。以 n 及 θ 表 α 及 β。

(3 marks)

(c) Let $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Find $B + B^3 + B^5 + \cdots + B^{25}$. 應試技巧 6.3

設 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$。求 $B + B^3 + B^5 + \cdots + B^{25}$。

(6 marks)

題解

(a) $|P| = \cos\theta - (-\sin\theta)$

$= \cos\theta + \sin\theta$

$$P^{-1} = \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\begin{pmatrix} 1 & -\sin\theta \\ 1 & \cos\theta \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ 1A

$$P^{-1}AP$$

$$= \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & 2-\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -1 \\ \sin\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta - \cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -1 \\ \sin\theta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{1M}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\begin{pmatrix} 2(\cos\theta + \sin\theta) & 0 \\ 0 & (\cos\theta + \sin\theta)(2 - \cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{1}$$

(b) $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - \cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix}^n$$

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (2 - \cos\theta - \sin\theta)^n \end{pmatrix} \quad \text{1M}$$

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (2 - \cos\theta - \sin\theta)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\therefore \quad \alpha = \underline{\underline{2^n}} \quad \text{1A}$$

$$\beta = \underline{\underline{(2 - \cos\theta - \sin\theta)^n}} \quad \text{1A}$$

(c) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 \\ 1 & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & 2 - \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{1A}$$

Take $\theta = \frac{\pi}{2}$.

取 $\theta = \frac{\pi}{2}$。

$$P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -1 \\ \sin\frac{\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B^n=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & \left(2-\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$ 1M

$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2^n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^n-1 & 2^n\end{pmatrix}$$ 1M

$B+B^3+B^5+\cdots+B^{25}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^1-1 & 2^1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^3-1 & 2^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^5-1 & 2^5\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^{25}-1 & 2^{25}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}13 & 0\\ \boxed{2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{25}}-13 & \boxed{2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{25}}\end{pmatrix}$$ 1M

$$=\begin{pmatrix}13 & 0\\ \frac{2[(2^2)^{13}-1]}{2^2-1}-13 & \frac{2[(2^2)^{13}-1]}{2^2-1}\end{pmatrix}$$ 1M

等比數列之和：
$a+aR+aR^2+\cdots+aR^{n-1}$
$=\frac{a(R^n-1)}{R-1}$
其中首項 $a=2$、公比 $R=2^2$、項數 $n=13$ 。

$$=\begin{pmatrix}13 & 0\\ 44739229 & 44739242\end{pmatrix}$$ 1A

→ 乙部應試特訓 3：Q2 – Q3

應試例題 3

參考：2023Q11

Consider the system of linear equations in real variables x, y, z

考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(S):\begin{cases} x+2y+\quad\quad 4z = 0 \\ ax-\ \ y-\quad\quad\ \ z = 2b, \\ \quad\ \ 2y+(a+2)z = b^2 \end{cases}$$

where $a, b \in \mathbf{R}$.

其中 $a, b \in \mathbf{R}$。

(a) Suppose that $b = 0$. 應試技巧 7.3

假設 $b = 0$。

(i) Find the value(s) of a such that (S) has non-trivial solutions.

求 a 的值使得 (S) 有非平凡解。

(ii) For the greatest value of a in **(a)(i)**, solve (S).

取 **(a)(i)** 中 a 的最大值，解 (S)。

(4 marks)

(b) Suppose that $b \neq 0$. Find the values of a and b such that (S) has infinitely many solutions. 應試技巧 7.2

假設 $b \neq 0$。求 a 及 b 的值使得 (S) 有無限多個解。

(3 marks)

(c) Consider the system of linear equations in real variables x, y, z

考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(T):\begin{cases} x+2y+4z = 0 \\ 3x-\ \ y-\ \ z = 2k, \\ \quad\ \ 2y+5z = k^2 \end{cases}$$

Does there exist at least a pair of real constants m and n (independent of k) such that for every $k \in \mathbf{R}$, (T) has a real solution (x, y, z) satisfying $x + my + nz = k$? Explain your answer. 應試技巧 7.4

是否存在最少一對實常數 m 及 n（獨立於 k），使得對於每一 $k \in \mathbf{R}$，(T) 都有一滿足 $x+my+nz=k$ 的實數解 (x, y, z)？解釋你的答案。

(6 marks)

題解

(a) (i) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & -1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{vmatrix} = 0$$ 1M

$$-(a+2) + 0 + 8a - 0 - 2a(a+2) + 2 = 0$$

$$-2a^2 + 3a = 0$$

$$\underline{\underline{a = 0 \text{ or } \frac{3}{2}}}$$ 1A

(ii) Taking $a = \frac{3}{2}$, the augmented matrix of (S) is

取 $a = \frac{3}{2}$，(S) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{7}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right)$$ ◀ $2R_2 \to R_2$; $2R_3 \to R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & -14 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right)$$ ◀ $R_2 - 3R_1 \to R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right)$$ ◀ $R_2 \div (-2) \to R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ ◀ $R_3 - R_2 \to R_3$ 1M

$\therefore$ The solution set is $\left\{\left(-\frac{t}{2}, -\frac{7t}{4}, t\right) : t \in \mathbf{R}\right\}$. 1A

解集為 $\left\{\left(-\frac{t}{2}, -\frac{7t}{4}, t\right) : t \in \mathbf{R}\right\}$。

設 $z = t$，則 $y = -\frac{7t}{4}$，
$x = -4t - 2\left(-\frac{7t}{4}\right) = -\frac{t}{2}$。

(b) 分析

對 $b \neq 0$，當 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & -1 & -1 \\ 0 & 2 & a+2 \end{vmatrix} = 0$ 時，(S) 沒有唯一解 (does not have a unique solution)。

由 **(a)**，$a = 0$ 或 $\frac{3}{2}$。再檢查哪些 a 及 b 的值可得出無限多個解 (has infinitely many solutions)。

When $a = 0$, the augmented matrix of (S) is

當 $a = 0$ 時，(S) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2b \\ 0 & 2 & 2 & b^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b^2+4b \end{array}\right) \quad \blacktriangleleft\ R_3 + 2R_2 \to R_3$$

1M (either one)

$\therefore \quad b^2 + 4b = 0$

$b = -4$ or $b = 0$ (rejected)

When $a = \frac{3}{2}$, the augmented matrix of (S) is

當 $a = \frac{3}{2}$ 時，(S) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 & 2b \\ 0 & 2 & \frac{7}{2} & b^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 4b \\ 0 & 4 & 7 & 2b^2 \end{array}\right) \quad \blacktriangleleft\ 2R_2 \to R_2;\ 2R_3 \to R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & -14 & 4b \\ 0 & 4 & 7 & 2b^2 \end{array}\right) \quad \blacktriangleleft\ R_2 - 3R_1 \to R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -2b \\ 0 & 4 & 7 & 2b^2 \end{array}\right) \quad \blacktriangleleft\ R_2 \div (-2) \to R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -2b \\ 0 & 0 & 0 & 2b^2+2b \end{array}\right) \quad \blacktriangleleft\ R_3 - R_2 \to R_3$$

$\therefore \quad 2b^2 + 2b = 0$

$b = -1$ or $b = 0$ (rejected)

$$\therefore \begin{cases} a = \underline{\underline{0}} \\ b = \underline{\underline{-4}} \end{cases} \text{ or } \begin{cases} a = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \\ b = \underline{\underline{-1}} \end{cases}$$

1A + 1A

(c) 分析

取 $a=3$ 及 $b=k$，(S) 便會轉換成 (T)。
由 **(b)**，若 $k\neq 0$，(T) 有唯一解。由 **(a)**，若 $k=0$，(T) 只有平凡解。

When $a=3$, the augmented matrix of (T) is
當 $a=3$ 時，(T) 的增廣矩陣為

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2k \\ 0 & 2 & 5 & k^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 2k \\ 0 & 2 & 5 & k^2 \end{array}\right)$$ ◀ $R_2-3R_1\to R_2$ 1M

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 2k \\ 0 & 0 & 9 & 7k^2+4k \end{array}\right)$$ ◀ $7R_3+2R_2\to R_3$

$$\therefore \quad z=\frac{7k^2+4k}{9},\ y=\frac{-13k^2-10k}{9},\ x=\frac{4k-2k^2}{9}$$ 1A

$$x+my+nz=k$$

$$\frac{4k-2k^2}{9}+m\left(\frac{-13k^2-10k}{9}\right)+n\left(\frac{7k^2+4k}{9}\right)=k$$ 1M

$$(-13m+7n-2)k^2=(10m-4n+5)k$$

When $k\neq 0$,
當 $k\neq 0$ 時，

$$\begin{cases} -13m+7n-2=0 \\ 10m-4n+5=0 \end{cases}$$ 1M

$$\Rightarrow \quad m=-\frac{3}{2},\ n=-\frac{5}{2}$$

When $k=0$, (T) only has a trivial solution. 1M
當 $k=0$ 時，(T) 只有平凡解。

$\therefore$ $x=y=z=0$
$0+0m+0n=0$ ...(*)

$\therefore$ There exists infinite pairs of m and n satisfying (*).
存在無限多對 m 及 n 滿足 (*)。

$\therefore$ There exists at least a pair of real constants m and n (independent of k) such that for every $k\in\mathbf{R}$, (T) has a real solution (x,y,z) satisfying $x+my+nz=k$. 1A
存在最少一對實常數 m 及 n（獨立於 k），使得對於每一 $k\in\mathbf{R}$，(T) 都有一滿足 $x+my+nz=k$ 的實數解 (x,y,z)。

➡ 乙部應試特訓 3：Q6 – Q8

1. **(a)** Let α and β be real numbers such that $\beta - \alpha \neq 4$. Denote the 2×2 identity martix by I.

Define $P = \dfrac{1}{\alpha - \beta + 4}(M - \beta I + 2I)$ and $Q = \dfrac{1}{\alpha - \beta + 4}(M - \alpha I - 2I)$,

where $M = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ \alpha - \beta + 2 & \beta \end{pmatrix}$.

(i) Evaluate PQ, QP and $P - Q$.

(ii) Prove that $P^2 = P$ and $Q^2 = -Q$.

(iii) Prove that $M^n = (\alpha + 2)^n P - (\beta - 2)^n Q$ for all positive integers n.

(8 marks)

(b) Using **(a)**, or otherwise, evaluate $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$.

(4 marks)

(a) 設 α 及 β 均為實數使得 $\beta - \alpha \neq 4$。將 2×2 單位矩陣記為 I。

定義 $P = \dfrac{1}{\alpha - \beta + 4}(M - \beta I + 2I)$ 及 $Q = \dfrac{1}{\alpha - \beta + 4}(M - \alpha I - 2I)$，

其中 $M = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ \alpha - \beta + 2 & \beta \end{pmatrix}$。

(i) 計算 PQ、QP 及 $P - Q$。

(ii) 證明 $P^2 = P$ 及 $Q^2 = -Q$。

(iii) 證明對所有正整數 n，$M^n = (\alpha + 2)^n P - (\beta - 2)^n Q$。

(8 分)

(b) 利用 **(a)**，或其他方法，計算 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^{2024}$。

(4 分)

參考： 2015Q11

2. Let $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) **(i)** Find AB and BA.

(ii) Using **(a)(i)**, or otherwise, find A^{-1}.

(4 marks)

(b) **(i)** Find ACA^{-1}.

(ii) Prove that C is invertible.

(iii) Find $(D^{-1})^{2024}$, where $D = ACA^{-1}$.

Hence, or otherwise, find $(C^{-1})^{2024}$.

(7 marks)

設 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 及 $C = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

(a) **(i)** 求 AB 及 BA。

(ii) 利用 **(a)(i)**，或其他方法，求 A^{-1}。

（4 分）

(b) **(i)** 求 ACA^{-1}.

(ii) 證明 C 是可逆的。

(iii) 求 $(D^{-1})^{2024}$，其中 $D = ACA^{-1}$。

由此，或其他方法，求 $(C^{-1})^{2024}$。

（7 分）

3. Let I be the 3×3 identity matrix. $P = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ and $Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, where a, b and c are real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(a) **(i)** Prove that QQ^TP is the 3×3 zero matrix.

(ii) Prove that $(I + P)^{-1} = \frac{1}{2}(I - P + QQ^T)$.

Hence, prove that $I + P^2 = QQ^T$.

(9 marks)

(b) Let $M = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Evaluate $M + \frac{1}{6}M^3 + \frac{1}{6^2}M^5 + \cdots + \frac{1}{6^{1048}}M^{2097}$.

(4 marks)

設 I 為 3×3 單位矩陣。$P = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ 及 $Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，其中 a、b 及 c 均為實數使得 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$。

(a) **(i)** 證明 QQ^TP 為 3×3 零矩陣。

(ii) 證明 $(I + P)^{-1} = \frac{1}{2}(I - P + QQ^T)$。

由此，證明 $I + P^2 = QQ^T$。

（9 分）

(b) 設 $M = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$。計算 $M + \frac{1}{6}M^3 + \frac{1}{6^2}M^5 + \cdots + \frac{1}{6^{1048}}M^{2097}$。

（4 分）

參考： 2022Q11

4. Let $M = \begin{pmatrix} k+1 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ and $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$, where k and p are real numbers and $p \neq 1$.

(a) **(i)** Express $A^{-1}MA$ in terms of k and p.

(ii) Suppose $p = k$. Using **(a)(i)**, prove that $M^n = \dfrac{1}{1-p}\begin{pmatrix} 1-p^{n+1} & p^n - 1 \\ p - p^{n+1} & p^n - p \end{pmatrix}$, where n is a positive integer.

(8 marks)

(b) A sequence is defined by

$x_1 = 0, x_2 = 3$ and $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ for $n = 3, 4, 5, \ldots$.

It is known that this sequence can be expressed in the matrix form

$$\begin{pmatrix} x_n \\ 2x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ 2x_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Using the result of **(a)(ii)**, express x_n in terms of n.

(4 marks)

設 $M = \begin{pmatrix} k+1 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ 及 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$，其中 k 及 p 均為實數，且 $p \neq 1$ 。

(a) **(i)** 以 k 及 p 表 $A^{-1}MA$ 。

(ii) 假設 $p = k$ 。利用 **(a)(i)** 證明 $M^n = \dfrac{1}{1-p}\begin{pmatrix} 1-p^{n+1} & p^n - 1 \\ p - p^{n+1} & p^n - p \end{pmatrix}$，其中 n 為正整數。

(8 分)

(b) 定義一數列為

$x_1 = 0$ ，$x_2 = 3$ 及 $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ 對 $n = 3, 4, 5, \ldots$ 。

已知此數列可以表示為矩陣形式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ 2x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ 2x_{n-2} \end{pmatrix} 。$$

利用 **(a)(ii)** 的結果，以 n 表 x_n 。

(4 分)

參考： 2014Q12

5. Let $M = \begin{pmatrix} 3+x & -y \\ -x & 3+y \end{pmatrix}$ and $P = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & -1 \end{pmatrix}$, where x and y are real numbers such that $xy > 0$.

(a) Prove that P is an invertible matrix.

(2 marks)

(b) Evaluate $P^{-1}MP$.

Hence, find $P^{-1}M^nP$ in terms of x, y and n, where n is a positive integer.

(5 marks)

(c) A sequence is defined by

$x_1 = 0$, $x_2 = 4$ and $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ for $n = 3, 4, 5, \ldots$.

It is known that this sequence can be expressed in the matrix form

$$\begin{pmatrix} x_{2n+2} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n+1} \\ x_{2n} \end{pmatrix}.$$

Express x_{2n} in terms of n.

(6 marks)

設 $M = \begin{pmatrix} 3+x & -y \\ -x & 3+y \end{pmatrix}$ 及 $P = \begin{pmatrix} y & 1 \\ x & -1 \end{pmatrix}$，其中 x 及 y 均為實數使得 $xy > 0$。

(a) 證明 P 為一可逆矩陣。

（2 分）

(b) 計算 $P^{-1}MP$。

由以，求 $P^{-1}M^nP$，答案以 x、y 及 n 表示，其中 n 為正整數。

（5 分）

(c) 定義一數列為

$x_1 = 0$，$x_2 = 4$ 及 $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ 對 $n = 3, 4, 5, \ldots$。

已知此數列可以表示為矩陣形式

$$\begin{pmatrix} x_{2n+2} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2n+1} \\ x_{2n} \end{pmatrix}。$$

以 n 表 x_{2n}。

（6 分）

參考： 2014Q12

6. **(a)** Consider the system of linear equations in real variables x, y, z

$$(E):\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + pz = q, \\ 4x + (2-p)y + (4p-5)z = q-8 \end{cases}$$

where p and q are real numbers.

(i) Assume that (E) has a unique solution.

(1) Prove that $p \neq 1$ and $p \neq 3$.

(2) Solve (E).

(ii) Assume that $p = 3$ and (E) is consistent.

(1) Find q.

(2) Solve (E).

(9 marks)

(b) Are there any real solutions of the system of linear equations

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 8x - 4y + 12z = -8 \\ 8x - 2y + 14z = -20 \end{cases}$$

satisfying $xy > 3z$? Explain your answer.

(3 marks)

(a) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E):\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + pz = q, \\ 4x + (2-p)y + (4p-5)z = q-8 \end{cases}$$

其中 p 及 q 均為實數。

(i) 假設 (E) 有唯一解。

(1) 證明 $p \neq 1$ 及 $p \neq 3$。

(2) 解 (E)。

(ii) 假設 $p = 3$ 且 (E) 有解。

(1) 求 q。

(2) 解 (E)。

(9 分)

(b) 線性方程組 $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 8x - 4y + 12z = -8 \\ 8x - 2y + 14z = -20 \end{cases}$ 是否有解滿足 $xy > 3z$？解釋你的答案。

(3 分)

參考：2016Q11

7. Consider the system of linear equations in real variables x, y, z

$$(E):\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ 3x + 2y + z = c \end{cases}, \text{ where } a, b, c \in \mathbf{R}.$$

(a) If $c = 2a + b$, prove that (E) is consistent and solve (E) in terms of a and b.

(4 marks)

(b) Consider the system of linear equations in real variables x, y, z

$$(F):\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 2 \\ 3x + 2y + z = \alpha \\ 2x + 3y - z = \beta \end{cases}, \text{ where } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Find the values of α and β for which (F) is consistent.

(3 marks)

(c) Consider the system of linear equations in real variables x, y, z

$$(G):\begin{cases} x + y = p \\ x + z = q \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}, \text{ where } p, q \in \mathbf{R}.$$

If (G) is consistent and $x^3 + y^2 + z$ attains a minimum value when $z = 2$, find the values of p and q.

(5 marks)

考慮實變數 x, y, z 的線性方程組 $(E):\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ 3x + 2y + z = c \end{cases}$，其中 $a, b, c \in \mathbf{R}$。

(a) 若 $c = 2a + b$，證明 (E) 有解，且以 a 及 b 表 (E) 的解。

（4 分）

(b) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組 $(F):\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 2 \\ 3x + 2y + z = \alpha \\ 2x + 3y - z = \beta \end{cases}$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$。

求 α 及 β 的值使得 (F) 有解。

（3 分）

(c) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組 $(G):\begin{cases} x + y = p \\ x + z = q \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}$，其中 $p, q \in \mathbf{R}$。

若 (G) 有解，及當 $z = 2$ 時 $x^3 + y^2 + z$ 達至極小值，求 p 及 q 的值。

（5 分）

參考：2018Q11

8. **(a)** Prove that $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & 1 \\ p^2 & q^2 & 1 \end{vmatrix} = (p - q)(p + q - pq - 1)$.

(3 marks)

(b) Consider the system of linear equations in real variables x, y, z

$$(E):\begin{cases} x + y + z = a \\ hx + 3y + z = b \\ h^2x + 9y + z = c \end{cases}, \text{ where } a, b, c, h \in \mathbf{R}.$$

(i) Find the value(s) of h such that (E) does not have unique solution.

(ii) Assume that $h = 3$ and (E) is consistent. Prove that $c - 4b + 3a = 0$ when (E) has infinitely many solutions.

(5 marks)

(c) Someone claims that the system of equations $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + z = 1 \\ 9x + 9y + z = -2 \\ 3x^2 + 6y^2 - 2z^2 = 0 \end{cases}$ has at least one real solution (x, y, z). Is the claim correct? Explain your answer.

(3 marks)

(a) 證明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & 1 \\ p^2 & q^2 & 1 \end{vmatrix} = (p-q)(p+q-pq-1)$ 。

（3 分）

(b) 考慮實變數 x, y, z 的線性方程組

$$(E): \begin{cases} x + y + z = a \\ hx + 3y + z = b \\ h^2x + 9y + z = c \end{cases}，其中 \ a, b, c, h \in \mathbf{R} 。$$

(i) 求 h 的值使得 (E) 沒有唯一解。

(ii) 假設 $h = 3$ 及 (E) 有解。證明當 (E) 有無限多個解時 $c - 4b + 3a = 0$ 。

（5 分）

(c) 某人宣稱方程組 $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + z = 1 \\ 9x + 9y + z = -2 \\ 3x^2 + 6y^2 - 2z^2 = 0 \end{cases}$ 至少有一實數解 (x, y, z)。該宣稱是否正確？解釋你的答案。

（3 分）