

# 1

## 近似與誤差



### 重溫筆記

#### 1. 有效數字

對於整數，所有非零數字及所有位於非零數字之間的零都是有效數字。

例：31 258 629 = 31 300 000  
(準確至三位有效數字)

對於小數，除了首個非零數字前的零並不是有效數字外，其他都是有效數字。

例：0.056 730 29 = 0.056 73  
(準確至四位有效數字)

#### 2. 科學記數法

任何正數均可利用科學記數法 (scientific notation) 表示為  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq a < 10$ ，而  $n$  為一整數。

例：23 100 000 =  $2.31 \times 10^7$   
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$   
 $0.000\ 078\ 43 = 7.843 \times 10^{-5}$   
 $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$

#### 3. 誤差

##### A. 絕對誤差

絕對誤差 = 量度結果與實際數值的差別。

例：若實際人數是 3214 及人數的近似值是 3200，  
則絕對誤差 =  $3214 - 3200 = 14$ 。

##### B. 最大絕對誤差

最大絕對誤差

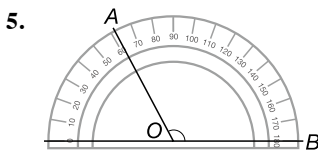
$= \frac{1}{2} \times$  量度工具上兩相鄰刻度之間的距離

例：圖中，量度的最大絕對誤差 =  $\frac{0.1}{2}$  cm  
= 0.05 cm

#### 概念測試

判別下列 (第 1–4 題) 各題是否正確。

- 532 000 可以是準確至四位有效數字。 是 / 非
- $30\ 400\ 000 = 3.04 \times 10^{-7}$  是 / 非
- 若間尺的準確度是 1 mm，使用該間尺量度的最大絕對誤差為 2 mm。 是 / 非
- 百分誤差 = 相對誤差  $\times 100\%$  是 / 非



圖中， $\angle AOB =$  (a) \_\_\_\_\_  
(準確至最接近的 (b) \_\_\_\_\_)

答案：(a) \_\_\_\_\_ (b) \_\_\_\_\_

- 答案：1. 是 2. 非 3. 非 4. 是 5. (a) 120° (b) 10°



C. 相對誤差

$$\text{相對誤差} = \frac{\text{最大絕對誤差}}{\text{量度值}} \text{ 或 } \frac{\text{絕對誤差}}{\text{實際數值}}$$

D. 百分誤差

$$\text{百分誤差} = \text{相對誤差} \times 100\%$$

E. 量度的上下限

$$\text{上限} = \text{量度值} + \text{最大絕對誤差}$$

$$\text{下限} = \text{量度值} - \text{最大絕對誤差}$$

## 大家來找錯

1. 若一枝鉛筆的長度為  $20 \text{ cm} \pm 1 \text{ cm}$ ，求百分誤差。

解：

$$\begin{aligned} \text{最大絕對誤差} &= \frac{1 \text{ cm}}{2} \\ &= 0.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{百分誤差} &= \frac{0.5 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} \times 100\% \\ &= 2.5\% \end{aligned}$$

$\pm 1 \text{ cm}$  表示最大絕對誤差為  $1 \text{ cm}$ 。由此，正確的解為：

$$\text{最大絕對誤差} = 1 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{百分誤差} &= \frac{1 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} \times 100\% \\ &= 5\% \end{aligned}$$

提升練習 問題 5

2. 某長方形的長度及闊度分別為  $6 \text{ cm}$  及  $4 \text{ cm}$ ，準確至最接近的  $0.5 \text{ cm}$ 。求該長方形的最大可能面積。

解：

$$\begin{aligned} \text{長方形面積} &= 6 \times 4 \text{ cm}^2 \\ &= 24 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最大可能面積} &= \left( 24 + \frac{0.5}{2} \right) \text{ cm}^2 \\ &= 24.25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

就長度和闊度而言，最大絕對誤差為  $0.5 \text{ cm}$ ，並不代表面積的最大絕對誤差亦為  $0.5 \text{ cm}$ 。由此，正確的解為：

$$\begin{aligned} \text{長度的最大值} &= (6 + 0.25) \text{ cm} \\ &= 6.25 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{闊度的最大值} &= (4 + 0.25) \text{ cm} \\ &= 4.25 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最大可能面積} &= 6.25 \times 4.25 \text{ cm}^2 \\ &= 26.5625 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

提升練習 問題 17

## 錯在哪裏？

細閱以下題目，並判別題解是否正確。若否，請修正題解。

1. 若某房間的溫度是  $25^\circ\text{C} \pm 0.5^\circ\text{C}$ ，求百分誤差。

解：

$$\begin{aligned} \text{百分誤差} &= \frac{0.5^\circ\text{C}}{25^\circ\text{C}} \times 100\% \\ &= 2\% \end{aligned}$$

2. 某三角形的底及高分別為  $10 \text{ cm}$  及  $6 \text{ cm}$ ，準確至最接近的  $\text{cm}$ 。求該三角形的最大可能面積。

解：

$$\begin{aligned} \text{最大可能面積} &= \frac{1}{2} \times (10 + 1) \times (6 + 1) \text{ cm}^2 \\ &= 38.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

## 提升練習

### 多項選擇題

1. 將 0.035 49 捨入至三位有效數字。
- A. 0.03      B. 0.04      C. 0.0354      D. 0.0355
- TSA**
2. 月球的直徑約為 3 500 000 m。利用科學記數法表示該直徑。
- A.  $3.5 \times 10^5$  m      B.  $35 \times 10^5$  m  
C.  $3.5 \times 10^6$  m      D.  $35 \times 10^6$  m
- TSA**
3. 一袋蔬菜的重量為 550 g (準確至最接近的 10 g)。下列何者可能為其實際重量？
- A. 555 g      B. 554.3 g      C. 544 g      D. 500 g
4. 某個量度值為 120 cm，準確至最接近的 10 cm。求最大絕對誤差。
- A. 2.5 cm      B. 5 cm      C. 10 cm      D. 20 cm
5. 一卷鋁箔的長度為 200 m，準確至二位有效數字。百分誤差為多少？
- A. 2.5%      B. 5%      C. 10%      D. 50%

### 基礎題

6. 求下列各數中有效數字的數目。
- (a) 20 413 \_\_\_\_\_      (b) 0.2104 \_\_\_\_\_      (c) 21 400 \_\_\_\_\_  
(d) 0.020 10 \_\_\_\_\_      (e) 20.010 \_\_\_\_\_
7. 把 24.310 472 捨入至下列各有效數字。
- (a) 二位有效數字 \_\_\_\_\_  
(b) 五位有效數字 \_\_\_\_\_  
(c) 六位有效數字 \_\_\_\_\_
8. 指出 21 000 在下列情況下的有效數字的數目。
- (a) 準確至最接近的整數 \_\_\_\_\_  
(b) 準確至最接近的十位 \_\_\_\_\_  
(c) 準確至最接近的千位 \_\_\_\_\_

使用計算機，求下列(第 9 – 10 題)各式的值。利用科學記數法表示答案，並準確至三位有效數字。

9.  $678 \times 12\,345 + 3.5 \times 10^7$       10.  $(2.532 \times 10^8 - 7.7734 \times 10^6) \div (3.345 \times 10^{-3})$

11. 不使用計算機，求  $3.1 \times 10^{11} + 2.55 \times 10^{10} - 365 \times 10^8$  的值。

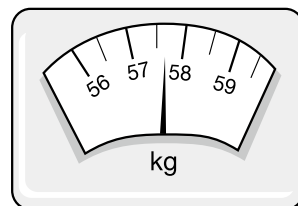
12. 完成下表。

|     | 量度值                      | 最大絕對誤差 | 相對誤差 | 百分誤差 |
|-----|--------------------------|--------|------|------|
| (a) | 10 kg (準確至最接近的kg)        |        |      |      |
| (b) | 4.0 分鐘 (準確至最接近的 0.1 分鐘)  |        |      |      |
| (c) | 12.5 cm (準確至最接近的 0.5 cm) |        |      |      |

13. 某量度值為 43.2，準確至最接近的 0.1。求量度的上限及下限。

14. 右圖顯示某男孩的體重。

- 寫出該男孩的體重的量度值。
- 求該男孩體重的量度值的最大絕對誤差。
- 求該男孩體重的量度值的相對誤差。



## 強化題

15. 某袋米的重量為 5 kg，準確至最接近的 0.1 kg。求

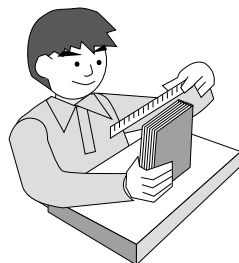
- 實際重量的上限；
- 實際重量的下限及
- 重量的量度值的相對誤差及百分誤差。

EYA

16. (a) 若某線的長度量度得為 3 cm，準確至最接近的 cm，求該線的最小可能長度。  
(b) 某線的長度量度得為 1.5 m，準確至最接近的 0.1 m。  
(i) 該線的實際長度是否可能超過 156 cm？試解釋你的答案。  
(ii) 當該線被剪成 52 條相同較短的線時，每條較短的線的長度是否可能量度得為 3 cm，準確至最接近的 cm？試解釋你的答案。

EYA

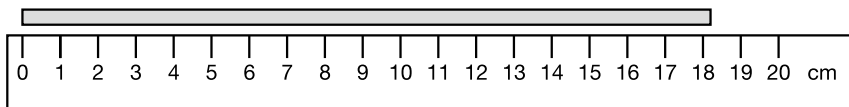
17. 一名男孩使用一把刻度為 0.1 cm 的間尺去量度數學課本的長度及闊度。他量度得的長度及闊度分別為 18.8 cm 及 26.1 cm。  
(a) (i) 長度的上限 = \_\_\_\_\_ cm  
(ii) 長度的下限 = \_\_\_\_\_ cm  
(iii) 闊度的上限 = \_\_\_\_\_ cm  
(iv) 闊度的下限 = \_\_\_\_\_ cm  
(b) (i) 量度得的課本面積是多少？  
(ii) 課本的實際面積可否為  $492 \text{ cm}^2$ ？試解釋你的答案。



## 自我測試站

1. 將 3 485 008.384 捨入至三位有效數字，並以科學記數法表示答案。

2.



圖中，求量度的百分誤差，準確至三位有效數字。

3. 某男孩的身高的下限及上限分別為 170.5 cm 及 171.5 cm。求量度的相對誤差。

## 知識延伸站

誤差在計算的過程中是會累積的。考慮一長方體金屬塊的大小量度得為  $15\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ ，準確至最接近的 cm。

$$\text{最大絕對誤差} = \frac{1\text{ cm}}{2} = 0.5\text{ cm}$$

$$\text{量度得的體積} = 15 \times 20 \times 8\text{ cm}^3 = 2400\text{ cm}^3$$

$$\text{最大可能體積} = (15 + 0.5)(20 + 0.5)(8 + 0.5)\text{ cm}^3 = 2700.875\text{ cm}^3$$

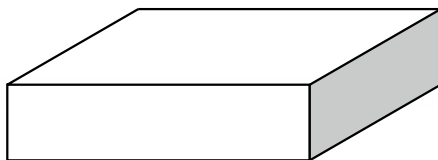
$$\text{最小可能體積} = (15 - 0.5)(20 - 0.5)(8 - 0.5)\text{ cm}^3 = 2120.625\text{ cm}^3$$

$$\text{最大可能體積} - \text{量度得的體積} = (2700.875 - 2400)\text{ cm}^3 = 300.875\text{ cm}^3$$

$$\text{量度得的體積} - \text{最小可能體積} = (2400 - 2120.625)\text{ cm}^3 = 279.375\text{ cm}^3$$

$$\therefore 300.875\text{ cm}^3 > 279.375\text{ cm}^3$$

$\therefore$  體積的累積誤差為  $300.875\text{ cm}^3$ 。



## 試一試

1. 某圓的半徑量度得為 10 cm，準確至最接近的 cm。求該圓的面積的累積誤差，答案以  $\pi$  表示。
2. 某長方形紙箱的大小量度得為  $50\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ ，準確至最接近的 cm。求該紙箱的容量的累積誤差。

## 網絡歷奇

### 估算的困難

在每年的「七一遊行」中，不同的團體對遊行人數的估算出現不同的結果。事實上，在日常生活中，估算時亦會出現困難。讓我們看一看以下網頁，以作進一步了解。

<http://hkupop.hku.hk/chinese/columns/columns23.html>

